

小磯深幸 (KOISO Miyuki)

研究概要

幾何学における基本的かつ重要な研究課題の一つとして、幾何学的変分問題の解についての研究がある。この種の問題で古くから研究されているものの中に、極小曲面と平均曲率一定曲面 (constant mean curvature surface. 以下, CMC 曲面と略記する) がある。前者は面積の臨界点, 後者は「囲む体積が一定」なる付加的条件のもとでの面積の臨界点である。そのため, これらはそれぞれ, 石鹸膜, シャボン玉の数学的抽象化と言われることがある。一方, たとえば結晶のように異方性を持つ物質の形状については, エネルギーとして面積汎関数を考えるだけでは十分でなく, より一般の, エネルギー密度が表面の法線方向に依存するような表面エネルギーを考える必要がある。曲面上の各点におけるこのようなエネルギーの曲面上での総和 (積分) を非等方的表面エネルギーと呼ぶ。これは, 結晶やある種の液晶の表面エネルギーの数学的モデルを与える。物理的にも自然な変分問題は「囲む体積が一定」なる条件のもとでの非等方的表面エネルギーの臨界点を研究することであるが, その解は非等方的平均曲率一定 (constant anisotropic mean curvature. 以下, CAMC と記す) 曲面と呼ばれるものになる。通常, 面積汎関数も非等方的表面エネルギーの特別な場合と考えるので, CAMC 曲面は極小曲面や CMC 曲面の一般化となっている。一般に, 変分問題の解は, 対応するエネルギー汎関数の第 2 変分が非負であるときに安定であるといわれる。特に, エネルギー極小解は安定である。物理的に実現されるのは安定な解だけであり, 安定解について研究することは重要である。小磯深幸は, これまで主としてリーマン多様体内の超曲面に対する変分問題の解の存在と一意性, 安定性, 幾何学的性質についての研究を行ってきた。

最近, 主として, Bennett Palmer 氏 (米国・アイダホ州立大学教授) との共同で, CMC 曲面を含む変分問題の解のクラス, 主に CAMC 曲面についての研究を行ってきた。非等方的表面エネルギーは, 結晶やある種の液晶のエネルギーの数学的モデルを与えており, 近年, 数学では, 微分幾何学, 幾何学的測度論, 凸解析, 微分方程式論, 確率論等の分野で研究されており, 自然科学のさまざまな分野においても研究されている。この中で, 微分幾何学的な研究については, 数年前まではあまり多くはなかったが, Koiso-Palmer による一連の研究により新たな発展を見, ドイツや中国を始めとする諸外国でも良い研究成果が出て来始めている。曲面の非等方性は形態形成に重要な役割を果たすため, 非等方的曲率流方程式が, 近年, 学際的に取り上げられているが, CAMC 曲面はこの方程式の解の極限を与える候補ともなり, その性質を研究することは, この意味でも重要である。Koiso-Palmer は, CAMC 曲面の幾何学的性質, 表現公式, 安定性, ガウス写像及びその除外集合問題, 自由境界問題の安定解の存在と一意性等について多くの研究成果を得た。特にここ数年の研究成果としては, たとえば, 広いクラスの非等方的表面エネルギーに対し, 平行な二平面上に自由境界をもつ安定な CAMC 曲面の幾何学的性質を決定し, 存在と一意性を証明した。また, 凸性条件を満たす一般の非等方的表面エネルギーに対し, 3次元ユークリッド空間内の種数 0 の CAMC 閉曲面は Wulff 図形またはその相似に限ることを証明した。

「マス・フォア・インダストリ」にかかわる H20, 21 年度の研究実績概要
CAMC 曲面は, 曲面が囲む体積を変えない変分に対する非等方的表面エネルギー

の臨界点であり，その研究は，数学の諸分野のみでなく，物理学や工学を始めとする他分野への応用もある重要な研究対象である．CAMC 曲面について，以下の研究成果を得た．

1. 自由境界問題の解の幾何学的性質，一意性，安定性（エネルギー極小性）の判定についての研究成果を得た．その中で，エネルギー汎関数が等方的である場合とは異なる現象が起こることを数値実験により発見した．また，ミクロな物理現象解明のための数学的方法についての新しい知見を得た．

2. 3次元ユークリッド空間内の種数0のCAMC閉曲面はWulff図形またはその相似に限ることを証明した．これは，非等方性を持つ物質の形状の決定に貢献する．

3. 安定解が，境界条件よりも低い対称性しか持たない例を構成する新たな数学的方法を構築しつつある．

研究業績

1. Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Equilibria for anisotropic surface energies and the Gielis formula, *Forma* Vol.23, No.1 (2008.12), pp.1–8.

2. Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Anisotropic Surface Energy, the Proceedings of the 16th OCU International Academic Symposium 2008 “Riemann Surfaces, Harmonic Maps and Visualization”, OCAMI Studies Volume 3, Osaka Municipal University Press, (March, 2010), pp.129–144.

3. Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Anisotropic umbilic points and Hopf’s Theorem for surfaces with constant anisotropic mean curvature, to appear in *Indiana University Mathematics Journal* Vol.59, No.1, 2010.

プレプリント

4. Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Equilibria for anisotropic surface energies with wetting and line tension, preprint, 25 pages, 2009.

5. Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Equilibria for anisotropic surface energies with wetting and line tension, preprint, 25 pages, 2009.

講演

1. Stability of surfaces with constant mean curvature, Geometry Seminar, (Tsinghua University, P. R. China), 2008年9月4日.

2. Miyuki Koiso, Gauss map and anisotropic Gauss map of surfaces with constant anisotropic mean curvature, Colloquium (Tsinghua University, P. R. China), 2008年9月11日.

3. Anisotropic surface energy and anisotropic Gauss map of surfaces, 東北大学幾何セミナー (東北大学), 2008年10月14日.

4. Anisotropic Gauss map of surfaces, One Day workshop on Differential Geometry (佐賀大学), 2008年11月20日.

5. Geometry and stability of rotationally symmetric hypersurfaces with constant mean curvature, Integrable systems, Geometry and Visualization 2008 (九州大学), 2008年12月11日.

6. A free boundary problem for surfaces with constant anisotropic mean curvature and related topics, Geometry Seminar (University of Murcia, Spain), 2009

年 3 月 6 日.

7. Miyuki Koiso, Stability of hypersurfaces with constant mean curvature, International Conference “Global Analysis and Differential Geometry” (佐賀大学), 2009 年 3 月 23 日.
8. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature, Differential Geometry with Mira (大阪大学), 2009 年 4 月 15 日.
9. Variational problems for anisotropic surface energies, PDE 実解析研究会 (東京大学), 2009 年 6 月 17 日.
10. Uniqueness for “small” CMC surfaces with boundary, 大阪市立大学微分幾何学セミナー (大阪市立大学), 2009 年 7 月 29 日.
11. Variational Problems for Anisotropic Surface Energies, 第 34 回偏微分方程式論札幌シンポジウム (北海道大学), 2009 年 8 月 26 日.
12. An anisotropic version of Hopf’s Theorem, 東京幾何セミナー (東京工業大学), 2009 年 12 月 9 日.
13. Geometric variational problems and bifurcation theory, The First CREST-SBM International Conference (仙台国際センター), 2010 年 1 月 28 日.
14. 曲面の変分問題の解の大域解析とその応用, 大阪市立大学数学教室談話会 (大阪市立大学), 2010 年 2 月 10 日.
15. EStability and bifurcation for solutions of isoperimetric type problems, The 2nd TIMS-OCAMI Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, (National Taiwan University, Taiwan), 2010 年 3 月 22 日.

学位

理学博士 (大阪大学)

研究集会の主催

1. Variational Problems for Curves and Surfaces and Related Topics, 奈良女子大学理学部, 2009 年 6 月 30 日-7 月 2 日.

その他の特記事項

- ・日本学術会議連携会員, 2006 年 8 月-2014 年 9 月 30 日.
- ・日本数学会評議員, 2008 年 3 月 1 月-2010 年 2 月 28 日.
- ・日本数学会理事, 2009 年 4 月 20 月-2011 年 4 月 19 日.
- ・(独) 科学技術振興機構・戦略的創造研究推進事業「数学と諸分野の協働によるブレークスルーの探索」さきがけ研究者 (研究題目: 幾何学的変分問題の解の大域解析とその応用), 2008 年 10 月 1 日-2012 年 3 月 31 日.