

松井 卓 (MATSUI Taku)

### 研究概要

無限自由度の量子系を関数解析的な立場から研究している。これまでに主に研究した内容は以下の4つである。(i) 時間に依存する外場と相互作用する第2量子化したディラック場の散乱作用素に対する指数公式と真空偏極、荷電セクター (ii) 無限自由度量子スピン系の基底状態の構造 (iii) UHF 代数上のマルコフ半群のエルゴード性と長距離相互作用を持つ量子スピン系への応用 (iv) (非) 平衡状態にある量子系での極限定理 (v) 無限自由度量子スピン系の純粋状態の Haag 双対性と応用

#### (i) 散乱作用素に対する指数公式

(量子化されていない) 外場と相互作用する第二量子化されたフェルミ粒子場の真空偏極の問題を考察すると自然に第一量子化のレベルの散乱作用素に関しての指数公式に行き着く。良い減衰条件のもとで時間に依存するポテンシャルを持つディラック作用素の散乱作用素は、ユニタリーであるが、自由ディラック作用素の正のスペクトル部分空間に制限するとフレドホルム作用素となることが知られていた。(A.L.Carey 等による結果) そこで、このフレドホルム指数が零でないポテンシャルは存在するか? その指数の値が計算できるか? が、問題となっていた。我々の研究では、ポテンシャルの時間減衰にある種の仮定をおくと通常のディラック作用素の場合では指数が零になるが、質量零のカイラルディラック場に対応する場合には指数はゲージ場のインスタントン数と一致することを初めて証明した。(ここでゲージ場は二乗可積分性と regularity を仮定するので非コンパクト領域でもインスタントン数は整数として定義できる。) この研究により、散乱作用素からさだまるフレドホルム指数と荷電セクターの関係、局所量子場理論における錐状領域に局所化された準同型の物理的な実現の仕方が明らかになった。

#### (ii) 無限自由度量子スピン系の基底状態の構造

通常、古典スピン系の平衡状態は空間次元が1次元下がった量子スピン系の基底状態に対応すると考えられている。そこで、量子スピン系の無限体積極限でも基底状態の一意性や相図 (Phase Diagram)、基底状態でのスペクトルの構造を研究することは磁性体など物性理論として重要なだけでなく、対応する古典スピン系やユークリッド場の理論の研究からも興味深い。我々は、無限体積極限での基底状態の一意性、基底状態でのスペクトルの構造を関数解析的な手法を使い研究してきた。(古典) イジング模型では相転移が起こる様子は、無限遠でも境界条件の影響と考えられるが、同様に無限遠でも境界条件の及ぼす影響を基底状態について考察した。もっとも簡単な1次元系である強磁性ハイゼンベルク模型、XY 模型また Haldane 相の例である AKLT (Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki) 模型で無限体積極限での基底状態の一意性または知られている基底状態につけることの証明を行った。副産物として(質量が正の) 量子スピン系のソリトンセクターの分類定

理も得た。

(iii) UHF 代数上のマルコフ半群

量子系で非平衡状態の緩和を扱う場合 Lindblad 生成作用素がしばしば用いられる。格子模型では、これは Stochastic Ising Model (Glauber dynamics と呼ばれる) の量子版と理解されるが、これまでに、マルコフ半群が Feller であるか? エルゴード性条件は十分検討されていなかった。Stochastic Ising Model の研究の類似を求めることで、これらの問題に一定の成果を得た。副産物として量子スピン系で長距離相互作用を持つ系でも時間発展を表す UHF 代数の自己同型群の存在条件を改良した。

(iv) 量子系における中心極限定理

量子系における中心極限定理の研究は非平衡統計力学の研究の枠組みで 1970 年代前半よりあったが、1989年にベルギー・ルーバン大学の A.Verbeure, Goderis, Vets 等が数学的な形式を与えた。しかし彼等の仮定は強過ぎて実際の系に応用出来ない。我々は、彼らの証明を再検討し量子 1 次元系の (任意の温度での) 平衡状態や多次元系で高温での平衡状態で Verbeure-Goderis-Vets の中心極限定理が成立することを証明した。我々の研究の後、量子系における中心極限定理は、ヨーロッパの量子計算の研究者により量子状態の Entanglement と関連があることが指摘され、実際に観測可能な効果であることが明らかになりつつある。最近では物理学者がエントロピー生成の揺らぎと呼ぶ確率測度の極限定理に興味がある。相関関数の減衰が遅いので中心極限定理は、何らかの修正を加えないと成立しない事が判明した。

(v) 量子スピン系の既約表現におけるハーク双対性

1 次元量子系の並進不変純粋状態で半無限領域に対して場の量子論における Haag の双対性の証明を研究している。場の量子論の場合と同様に格子模型でも Reeh-Schlieder の性質が真空ベクトル (GNS ベクトル) で成立すれば双対性の証明ができる事は判明した。Reeh-Schlieder の性質が一般的に成立するかは現段階では不明であるが反例の構成も困難である。ハーク双対性の新しい応用として 1 次元系の場合スペクトルギャップの開いたハミルトニアン の純粋基底状態でハーク双対性が成立すればエントロピーに関しての面積則が成立することが分かった。

最近では格子模型におけるボーズアインシュタイ凝縮、Ruelle が提唱した非平衡定常状態の特徴付けなどの新しいテーマにも研究の範囲を広げている。

「マス・フォア・インダストリ」にかかわる H20, 21 年度の研究実績概要

1 次元量子系の並進不変純粋状態で半無限領域に対して場の量子論における Haag の双対性の証明を研究している。場の量子論の場合と同様に格子模型でも Reeh-Schlieder の性質が真空ベクトル (GNS ベクトル) で成立すれば双対性の証明ができる事は判明した。

Reeh-Schieler の性質が一般的に成立するかは現段階では不明であるが反例の構成も困難である。更にハーク双対性の新しい応用を研究した。1次元系の場合スペクトルギャップの開いたハミルトニアン of 純粋基底状態でハーク双対性が成立すればエントロピーに関しての面積則が成立することが分かった。ハーク双対性があれば1次元系特有の自発的対称性の破れとスペクトルギャップの存在の関係(ハイゼンベルク模型の Haldane 予想など)の照明が出来る事が判明した。これらの成果は将来的に量子情報、新素材開発のための基礎理論となることが期待される。

#### 研究業績

1. ON HAAG DUALITY FOR PURE STATES OF QUANTUM SPIN CHAINS with M.Keyl, D.Schlingemann, and R.F.Werner *Rev.Math.Phys.* 20,707-724(2008)
2. Spectral gap, and split property in quantum spin chains (単著) *J. Math. Phys.* 51, 015216 (2010); doi:10.1063/1.3285046 (8 pages)

#### 講演

理学博士(京都大学)

#### 講演

1. NESS of Quantum Spin Models and Variational Principle. Statistical Mechanics and Probability Theory, 3-28 March 2003,CIRM, Luminy,France
2. On the absence of non-periodic ground states for the antiferromagnetic  $XXZ$  model. Workshop on Dynamics in Statistical Mechanics,2-6 August 2004,Montreal,Canada.
3. BEC and NESS on Lattices, Workshop on Open Quantum Systems, February-March. 2005 .ESI, Vienna,Austria.
- 4.Entanglement and Haag duality, Mathematical Analysis of Quantum Systems, Monday 2nd to Wednesday 4th April 2007 Dublin Institute of Advanced Studies
- 5.Split Property and Symmetry Breaking,International Congress of Mathematical Physics,Prague, 8th August 2009

#### 研究会主催

- 1.Frontier of Non-commutative Analysis and Mathematical Quantum Theory, Fukuoka, Aug., 2002. 主催
- 2.Current Status of Rigorous Statistical Mechanics and Mathematical Quantum Field Theory, Nishijin Plaza,Fukuoka Sep.2006. 主催
3. Mathematical Quantum Field Theory and Renormalization Theory, Nishijin Plaza,Fukuoka 26-29,Nov.2009. 主催