

研究概要

ミクロからマクロスケール，さらには，宙空スケールから銀河スケールにいたるまで，われわれを取り巻く世界はひも状構造に満ち満ちている．それらは，流体の渦糸，弾性体ひも，そして，磁束管であったりするが，これら特異構造の非線形・非定常ダイナミクスと安定性が世界の形成に大きな役割を果たしていることは想像に難くない．宇宙の秘密を解き明かし，自然を制御していく鍵の一つが渦であろう．「渦」と「波」が流体の構成要素であるという視点から，数値計算も援用しながら，渦運動やその安定性を計算するための数学的手法の開発を行っている．渦輪や渦管の運動速度や渦輪の 3 次元安定性に関しては最先端の知見を手にするまでになった．

電磁流体力学においては，磁場と渦度場には理想流体中では流れに凍結して運ばれるという共通項がある．このトポロジカルな属性は運動量やエネルギーといったダイナミカルな属性とは明確に区別されるべきもので，前者の表現には Euler 的よりもむしろ Lagrange 的記述の方が優れている．流体粒子個々の運動をたどる Lagrange 的記述は，従来は，冗長であるとして避けられてきたが，最近，渦の運動や安定性の計算にはより直接的で，強大な威力を発揮することに気づいてきた．Lagrange 的記述によって渦運動を再構成し，それを複雑な波動乱流のモデル化につなげることを目標としている．

1. 渦管の運動に対する特異摂動法

有限太さをもつ渦管の 3 次元運動に固有の双極子構造に気がついた．この視点と可積分系を足がかりにして，渦管の運動に対して，Navier-Stokes (Euler) 方程式の渦核半径-曲率半径比についての漸近展開の高次への拡張を行った．

i) 非圧縮流体中を一定速度で運動する定常渦流は「インパルス一定という拘束条件下での等循環面上のエネルギー極大・極小状態である」ことを証明した．この変分原理と接合漸近展開法とを組み合わせることによって，非粘性流体中の軸対称渦輪の進行速度の渦核-リング半径比についての 3 次補正項を導出した．さらに，高レイノルズ数の運動にも適用して，Saffman(1970) の速度公式を大幅に改善した．この結果は数値シミュレーションとよい一致を示す [2, 11]．

ii) 低 Reynolds 数極限で，非定常 Stokes 方程式を解いて，任意の初期軸対称渦度分布に対して，渦輪の渦度分布を積分表示の形で書きあらわした．とくに，初期にデルタ関数核をとるとき，渦輪の運動速度を一般化超幾何関数を用いて閉じた形で書き下すことに成功した．これはすべての時刻に適用でき，これを操作することによって，初期段階や減衰段階の漸近形を導いた．渦輪が一生涯かけて移動できる距離も簡単な形で求められた [1, 15]．

粘性項の形を修正することで乱流渦輪のモデルも構成できる [8]．

2. 渦糸の 3 次元運動と可積分系

渦糸の 3 次元自己誘導運動に対する最も単純な漸近理論が「局所誘導近似 (LIA)」である．これは完全可積分 Hamilton 力学系で，局所誘導階層 (LIH) とよばれる無限個の可換なベクトル場系列を伴う．

自然の細長い渦は，渦核内に軸方向流を伴うことが多い．軸流をもつ渦糸 (= 渦ジェット系) の運動方程式は，LIA 近似のもとで，LIH の 1 番目と 2 番目のベ

クトル場からなる．一定速度で並進運動する渦ジェット系の形が，弾性棒の 3 次元平衡形 (= Kirchhoff のエラスティカ) と等価であることを発見した．このアナロジーの起源を変分原理に求めた．物質枠 (material frames: $SO(3)$) を変数とする変分原理によって弾性棒の平衡形の方程式が直接導出できることを示した．

目下，伸び縮みを許す弾性棒の進行波解の構成を行っている．

3. 渦管の 3 次元不安定性

Hamilton 力学系の観点から，渦管の 3 次元安定性解析を行っている．

「らせん渦管」の線形安定性を短波長安定性解析により調べた．渦輪の場合と同様にらせん渦にも曲率不安定性が存在することを示した．振りと回転の効果により曲率不安定性は変調を受ける [7, 12] ．

4. 流れのスペクトルと波の非線形相互作用

波のエネルギーの計算には渦度のトポロジを保持 Lagrange 的記述の方がすぐれている．Lagrange 変位を基本変数にとって，非粘性流体・磁気流体の定常流の上に立つ波の Hamilton 力学系的定式化を振幅について 2 次まで行った．

i) 波のエネルギーを 1 次の Lagrange 変位のみで表現することに成功し，それが分散関係の微分で与えられることを証明した．点スペクトルの固有モードのみならず連続スペクトルの特異モードに対しても一般化された分散関係を定義し，連続スペクトルにおいてもエネルギーと分散関係の微分が対応づけられることを示した．

Krein 理論の観点から，平行流の不安定性とエネルギーの符号との関係を考察した [3, 4] ．

ii) Rankine 渦の上に立つ波を Kelvin 波という．Kelvin 波の自己非線形相互作用によって誘導される平均流が得られた．エネルギーと平均流は，波の作用に周波数と波数を乗ずることによってそれぞれ得られる．すなわち，平均流に密度を乗じた量は擬運動量と一致する [6] ．

この結果を利用して，断面が楕円形をした渦管上の攪乱の弱非線形発展を記述する振幅方程式を導出した [14] ．

5. 渦流の局所安定性

空間座標に線形的に依存する回転流の 3 次元短波長攪乱に対する線形安定性を調べる WKB 法が整備されてきた．この方法を用いて，2 つの非圧縮非粘性定常流 (Mahalov 流 [9] と Kerswell 流 [16]) について，回転軸自身が回転する歳差が剛体回転流の安定性におよぼす影響を数値計算と漸近理論の両面から調べ，歳差周波数が極めて大きい領域での状況を初めて明らかにした．Mahalov 流では，歳差回転角速度無限大の極限で，増幅率は剛体回転流の角速度に漸近する．同じ歳差周波数で比べると，Kerswell 流の方が増幅率は大きい．特に，歳差周波数が無限大の極限で，増幅率が攪乱波数に含まれるパラメータについて特異的に振る舞う新しいタイプの不安定性を発見した [16] ．

6. レーザー・金属相互作用による渦系の生成実験の解析

上からふたをされているとき，過加熱状態にある (superheated) 上部融解相が冷却される段階で，ドロップやホールが生成される．これら点状欠陥と相互作用する渦系が織りなす多様なパターンを作り出すことに成功した．他にも，Hopf リンクをはじめとする結び目構造や，1 次元および 2 次元の点欠陥のランダム配列に

よる 1 次元, 2 次元 Hopf リンク結晶, シャーク曲面などを作り出すことに成功した [13].

7. Euler-Poincaré 方程式と Noether の定理

Euler-Poincaré 方程式は Euler 方程式の拡張であり, 渦線のトポロジー保つという性質を有するものの中で最も一般的な方程式である. Euler-Poincaré 方程式に対する Hamilton の最小作用の原理の枠組みで, 位相不変量である「循環」と「ヘリシティ」の不変性を, 粒子ラベルつけ替え対称性に関する Noether の定理として特徴づけた. この結果が次元によらないことがヒントになり, 平面流や軸対称流に対するカシミール不変量がクロス・ヘリシティの形で表現できることを見つけた. これはトポロジー的不変量に対する統一的視点を提供する [5].

「マス・フォア・インダストリ」にかかわる H20, 21 年度の研究実績概要

Helmholtz-Lamb の方法を用いて, 低 Reynolds 数極限で, 初期にデルタ関数核をとる渦輪に対して, 運動速度を一般化超幾何関数を用いて閉じた形で書き下すことに成功した [1, 11]. これはすべての時刻に適用でき, 十分小さい時刻と大きな時刻で有効な漸近展開をそれぞれ行うことによって, 初期段階や減衰段階の漸近形を導いた. 渦輪が一生涯かけて移動できる距離も簡単な形で求められた. この渦度分布にもとづいて最適渦輪のパラメータを決定すると, 十分な精度で実験データに適合する [8, 15].

渦管の上に立つ Kelvin 波のエネルギーを 1 次のラグランジュ変位のみで表現することに成功し, それが分散関係の微分で与えられることを証明した [3, 4]. 連続スペクトルの特異モードに対しても, エネルギーと一般化された分散関係の微分を対応づけることができる. 副産物として, Kelvin 波の自己非線形相互作用によって誘導される平均流が得られ [6], 弱非線形振幅方程式の係数をすべて決定した. 結果として, 従来のオイラー的記述の枠組みで得られた振幅方程式が不完全であることを明らかにした [15].

研究業績

1. Y. Fukumoto and F. Kaplanski, Global time evolution of an axisymmetric vortex ring at low Reynolds numbers, *Phys. Fluids* 20 (2008) 053103 (13 pages).
2. Y. Fukumoto and H. K. Moffatt, Kinematic variational principle for motion of vortex rings, *Physica D* (2008) 237 (2008) 2210-2217.
3. M. Hirota and Y. Fukumoto, Energy of hydrodynamic and magnetohydrodynamic waves with point and continuous spectra, *J. Math. Phys.* 49 (2008) 083101 (28 pages).
4. M. Hirota and Y. Fukumoto, Action-angle variables for the continuous spectrum of ideal magnetohydrodynamics, *Phys. Plasmas* 15 (2008) 122101 (11 pages).
5. Y. Fukumoto, A unified view of topological invariants of fluid flows, *Topologica* 1 (2008) 003 (12 pages).
6. Y. Fukumoto and M. Hirota, Elliptical instability of a vortex tube and drift current induced by it, *Physica Scripta T132* (2008) 014041 (9 pages).
7. Y. Hattori and Y. Fukumoto, Short-wavelength stability analysis of a helical vortex tube, *Phys. Fluids* 21 (2009) 014104 (7 pages).
8. F. Kaplanski, S. Sazhin, Y. Fukumoto, B. Steven and H. Morgan, A generalised vortex ring model, *J. Fluid Mech.* 622 (2009) 233-258.

9. Me Me Naing and Y. Fukumoto, Local instability of an elliptical flow subjected to a Coriolis force, *J. Phys. Soc. Japan* **78** (2009) 124401 (7 pages).
10. 福本康秀, オイラー方程式の南部力学表現について, *ながれ* **28** (2009) 499-500.
11. Y. Fukumoto, Global time evolution of viscous vortex rings, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **24** (2010) 335-347.
12. Y. Hattori and Y. Fukumoto, Short-wave stability of a helical vortex tube: the effect of torsion on the curvature instability, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **24** (2010) 363-368.
13. S. Lugomer and Y. Fukumoto, Generation of ribbons, helicoids and complex Scherk surface in laser-matter interactions, *Phys. Rev. E* **81** (2010) 036311 (11 pages).
14. F. Kaplanski, S. S. Sazhin, S. Begg, Y. Fukumoto and M. Heikal, Dynamics of vortex rings and spray induced vortex ring-like structures, *European J. Mech. B/ Fluids* **29** (2010) 208-216.
15. Y. Mie and Y. Fukumoto, Weakly nonlinear saturation of stationary resonance of a rotating flow in an elliptic cylinder, *J. Math-for-Industry* **2 A** (2010) 27-37.

プレプリント

16. Me Me Naing and Y. Fukumoto, Local instability of a rotating flow driven by precession of arbitrary frequency, *submitted to Fluid Dynamics Research* (2010).

講演

1. Motion of vortex rings with and without magnetic field, XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM), Adelaide Convention Center, Adelaide, Australia. Aug. 26, 2008.
2. 理想磁気渦輪の運動に対するホール効果, 日本流体力学会年会 2008, 神戸大学六甲台キャンパス, 神戸, Sep. 6, 2008.
3. 理想磁気渦輪の運動に対するホール効果, 日本物理学 2008 年秋季大会, 岩手大学上田キャンパス, 盛岡, Sep. 20, 2008.
4. Global time evolution of viscous vortex rings, IUTAM symposium 150 Years of Vortex Dynamics, Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark, Oct. 16, 2008.
5. 渦流の 3 次元不安定性とそれよるドリフト流の誘導: ラグランジュ的アプローチ, 研究集会「乱流現象及び多自由度系の動力学, 構造と統計法則」, 九州大学応用力学研究所, 春日, Nov. 14, 2008.
6. Linear and weakly nonlinear stability of an elliptic flow from the viewpoint of Hamiltonian spectra, International workshop on verified computations and related topics, University of Karlsruhe (TH), Karlsruhe, Germany, Mar. 7, 2009.
7. Lagrangian approach to weakly nonlinear interactions of waves on a rotating flow, International Symposium on Modern Perspectives of Fluid Mechanics, 名古屋大学, 名古屋 Jun. 27, 2009.
8. 渦波の非線形相互作用によって誘導される平均流, 数理解析研究集会「オイラー方程式の数値: 渦運動と音波 150 年」, 京都大学大学院人間環境学研究所, 京都 Jul. 23, 2009.
9. Lagrangian approach to weakly nonlinear stability of an elliptical flow, Sec-

ond International Conference and Advanced School “Turbulent Mixing and Beyond”, The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP), Jul. 28, 2009.

10. ラグランジュ的記述による流れの短波長安定性理論, 日本物理学 2009 年秋季大会, 熊本大学黒髪キャンパス, 熊本, Sep. 26, 2009.

11. 非等方媒質中における電磁場の特異モード, 数理解析研究集会「非線形波動現象の数理と応用」, 京都大学大学院理学研究科, 京都 Oct. 19, 2009.

12. ケルヴィン波のエネルギーと誘導される平均流, そしてその楕円流の弱非線形安定性理論への応用, 未来研究ラボ「非線形ダイナミクス」研究会「流体力学における漸近解析」, 大阪大学基礎工学部, 豊中, Dec. 2, 2009.

13. Energy and mean flow of Kelvin waves, and their application to weakly nonlinear stability of an elliptical flow, International Workshop: Mathematical Analysis on the Navier-Stokes Equations and Related Topics, Past and Future – In memory of Professor Tetsuro Miyakawa –, 神戸大学六甲台キャンパス, Dec. 7, 2009.

14. Initiative to Develop Education & Research Interfaces between Mathematics and Industry under the Global COE Program ”Math-for-industry, The first International Congress of Mathematics, Engineering and Society: ICMES2009, Pontificia Universidade Católica de Paraná (PUCPR), Curitiba, Brazil, Dec. 10, 2009.

15. Elliptical instability of a vortex tube and its weakly nonlinear evolution, 2 Lectures at Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua, China, Feb. 17, 18, 2010.

16. Lagrangian approach to wave interactions on vortices and weakly nonlinear stability of an elliptical flow, Internatinal Conference on Mathematical Fluid Dynamics, 早稲田大学西早稲田キャンパス, 東京, Mar. 13, 2010.

学位

理学博士 (東京大学)

受賞歴

平成 5 年度日本流体力学会・竜門賞

研究集会の主催

1. 日本流体力学会年会 オーガナイザー: オーガナイズド・セッション「流体数理」, Sep. 4-6, 2008. Sep. 3-4, 2009

2. 京都大学数理解析研究所研究集会「オイラー方程式の数理: 渦運動 150 年」代表者, Jul. 16-18, 2008

3. 九州大学産業技術数理解析センター・第 6 回ワークショップ「産業技術数理チュートリアル: 非エルミート作用素のスペクトル理論とその応用」オーガナイザー, Mar. 19-20, 2009

4. 京都大学数理解析研究所研究集会「オイラー方程式の数理: 渦運動と音波 150 年」代表者, Jul. 21-23, 2009

5. 日韓 CFD ワークショップ 2009, 仙台市民会館, Dec. 16-17, 2009

その他の特記事項

- Reviewer to the Mathematical Reviews
- Associate Editor: Fluid Dynamics Research (2004-2008)

- Associate Editor: Journal of Math-for-Industry (2009-)
- 日本流体力学会理事 (2008-2009)